Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Enero-Marzo 2019 $\qquad$ 1$^{\text{er}}$ Parcial $\qquad$ Tipo:8

1. (4 puntos c/u) Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int (\sec x - \tan x)^2\, dx$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int x\,|2x-1|\, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x/2)}\, dx$

2. (6 puntos)

   (a) Usando la integral de Riemann. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x(3-x)$ y las rectas $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

   (b) La integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(3-x)\, dx$ representa el área obtenida en la parte 2a?

3. (6 puntos) Demuestre que

$$\left|\int_0^3 \left(\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1} - \cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right) dx\right| < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}$$

4. (6 puntos) Calcular el siguienteb límite, si existe.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arc\,sen} t\, dt}{\displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{t^3+1}\, dt}$$

¡Justifique Todas Sus Respuestas!

RESPUESTAS

Pregunta 1.

(a) $\displaystyle\int (\sec x - \tan x)^2\, dx$

Desarrollamos el binomio:

$$\int (\sec(x) - \tan(x))^2\ dx = \int [\sec^2(x) - 2\sec(x)\tan(x) + \tan^2(x)]\ dx$$

Por linealidad de la integral, separamos:

$$\int \sec^2(x)\ dx - 2\int \sec(x)\tan(x)\ dx + \int \tan^2(x)\ dx$$

Resolvemos las integrales de tabla:

(a) $\displaystyle\int \sec^2(x)\ dx = \tan(x) + \mathrm{c}_1$

(b) $\displaystyle -2\int \sec(x)\tan(x)\ dx = -2\sec(x) + \mathrm{c}_2$

(c) $\displaystyle\int \tan^2(x)\ dx = \int [\sec^2(x) - 1]\ dx = \int \sec^2(x)\ dx - \int\ dx$
$= \tan(x) - x + \mathrm{c}_3$

Finalmente:

$$\boxed{\int (\sec(x) - \tan(x))^2\ dx = 2\tan(x) + -2\sec(x) - x + C}$$

(b) $\displaystyle\int x\,|2x-1|\,dx$

Procedemos a definir el valor absoluto:

$$|2x-1| = \begin{cases} \text{2x-1 si 2x-1} \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ \text{-(2x-1) si 2x-1} < 0 \Longrightarrow x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para $x \geq \frac{1}{2}$ tenemos la siguiente integral:

$$\int x\,|2x-1|\,dx = \int x\,(2x-1)\,dx = 2\int x^2\,dx - \int x\,dx$$

$$\boxed{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1}$$

Para $x < \frac{1}{2}$ tenemos la siguiente integral:

$$\int x\,|2x-1|\,dx = \int x(-2x+1)\,dx = -2\int x^2\,dx + \int x\,dx$$

$$\boxed{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + C_2}$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x/2)}\,dx$

Procedemos a resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x/2)}\,dx$$

Usamos la siguiente identidad:

$$\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos(x)}{2} \Longrightarrow 2\cos^2(x/2) = 1+\cos(x)$$

Sustituimos la expresión obtenida en la integral:

$$2\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2\cos^2(x/2)}\,dx = 2\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos(x)}\,dx = 2\int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^{(}x)}\,dx$$

Desarrollamos la diferencia de cuadrados en el numerador:

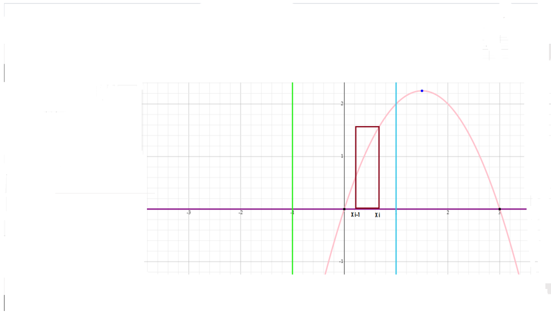
$$2\int \frac{(1-\cos(x))\cancel{(1+\cos(x))}}{\cancel{1+\cos^{(}x)}}\,dx = 2\int (1-\cos(x))\,dx = 2(x-\operatorname{sen}(x)) + C$$

Procedemos a evaluar en los límites de integración aplicando el segundo teorema fundamental del calculo:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x/2)}\,dx = [2(x-\operatorname{sen}(x))|_0^{\pi/2} = \boxed{\pi - 2}$$

Pregunta 2.

(a) Se recomienda graficar la función dada antes de comenzar cualquier calculo.



Sí analizamos la gráfica nos daremos cuenta que la función es creciente en el intervalo dado, sin embargo, al inscribir o circunscribir los rectángulos para las particiones veremos que los puntos muestra cambian. Por tanto, para ahorrar calculos dividiremos los intervalos de la siguiente forma:

a.1 Para el intervalo de $[0,1]$

Procedemos a calcular Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

con a = 0 y b = 1

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Calculamos los puntos muestra con rectángulos circunscritos:

1. $x_0 = 0$
2. $x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{1}{n}$
3. $x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$
4. $x_3 = x_2 + \Delta x = \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n}$
5. $x_i = x_0 + i\Delta x = \frac{i}{n}$

6. $x_{i-1} = x_0 + (i-1)\Delta x = \frac{i-1}{n}$

7. $x_n = x_o + n\Delta x = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

Procedemos a tomar como punto muestra $\overline{x_i} = \frac{i}{n}$

Ahora, calculamos $Sn = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x$

$$Sn = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i}{n} \cdot (3 - \frac{i}{n})\right] \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right] \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3i}{n^2} - \frac{i^2}{n^3}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{3}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i\right] - \frac{1}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \frac{3}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \boxed{-\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{n} + \frac{7}{6}}$$

Por último, evaluamos $\lim\limits_{n\to\infty} Sn$:

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty} -\cancelto{0}{\frac{1}{6n^2}} - \cancelto{0}{\frac{1}{n}} + \frac{7}{6} = \boxed{\frac{7}{6}}$$

a.2 Para el intervalo de $[-1, 0]$

Procedemos a calcular Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

con a = -1 y b = 0

$$\Delta x = \frac{0-(-1)}{n} = \frac{1}{n}$$

Calculamos los puntos muestra con rectángulos inscritos:

1. $x_0 = -1$
2. $x_1 = x_0 + \Delta x = -1 + \frac{1}{n}$
3. $x_2 = x_1 + \Delta x = -1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = -1 + \frac{2}{n}$
4. $x_3 = x_2 + \Delta x = -1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = -1 + \frac{3}{n}$
5. $x_i = x_0 + i\Delta x = -1 + \frac{i}{n}$
6. $x_{i-1} = x_0 + (i-1)\Delta x = -1 + \frac{i-1}{n}$
7. $x_n = x_o + n\Delta x = -1 + (n \cdot \frac{1}{n}) = -1 + 1 = 0$

Procedemos a tomar como punto muestra $\overline{x_i} = -1 + \frac{i}{n}$

Ahora, calculamos $Sn = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x$

$$Sn = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left[(-1 + \frac{i}{n}) \cdot (3 - (-1 + \frac{i}{n})) \right] \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(-1 + \frac{i}{n}) \cdot (4 - \frac{i}{n}) \right] \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{i^2}{n^2} + \frac{5i}{n} - 4 \right] \cdot \frac{1}{n}$$

$$= -\frac{1}{n^3} \left[\sum_{i=1}^{n} i^2 \right] + \frac{5}{n^2} \left[\sum_{i=1}^{n} i \right] - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} 4 \right]$$

$$= -\frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] + \frac{5}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] - \frac{1}{n} [4n]$$

$$\boxed{= -\frac{11}{6} + \frac{2}{n} - \frac{1}{6n^2}}$$

Por último, evaluamos $\lim_{n\to\infty} Sn$:

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty} -\frac{11}{6} + \cancelto{0}{\frac{2}{n}} - \cancelto{0}{\frac{1}{6n^2}} = \boxed{-\frac{11}{6}}$$

Finalmente, sumamos lo obtenido en a.1 y a.2:

$$\boxed{\frac{7}{6} - \frac{11}{6} = -\frac{2}{3}}$$

(b) Para justificar si la integral dada representa el área obtenia en la parte anterior, procedemos a resolverla aplicando el segundo teorema fundamental del calculo:

$$\int_{-1}^{1} x(3-x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Pregunta 3.

Para

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1} - \cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right) dx\right| < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}$$

Por teorema, se sabe que

$$\left|\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx$$

Entonces

$$\underbrace{\int_0^1 \left|\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1}\right| dx}_{[\mathrm{I}]} - \underbrace{\int_0^1 \left|\cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right| dx}_{[\mathrm{II}]} < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}$$

Resolvemos (I)

$$\int_0^1 \left|\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1}\right| dx = \int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})|}{|x^2+1|}\, dx = \int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})|}{x^2+1}\, dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable $\begin{matrix} u^2 = x \\ 2udu = dx \end{matrix}\ ; \begin{cases} x = 0; u = 0 \\ x = 1; u = 1 \end{cases}$

Así,

$$\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})|}{x^2+1}\, dx = \int_0^1 \frac{2u|\operatorname{sen}^2(\sqrt{u^2})|}{(u^2)^2+1}\, du = \int_0^1 \frac{2u|\operatorname{sen}^2 u|}{u^4+1}\, du$$

A su vez, se sabe que

$$-1 \leq \operatorname{sen} u \leq 1 \ \rightarrow (-1)^2 \leq \operatorname{sen}^2 u \leq (1)^2 \ \rightarrow \operatorname{sen}^2 u \leq 1$$

Entonces,

$$\int_0^1 \frac{2u|\operatorname{sen}^2 u|}{u^4+1}\, du = \int_0^1 \frac{2u}{u^4+1}\, du;\ \text{sea}\ \begin{matrix} u^2 = z \\ 2udu = dz \end{matrix}\ ; \begin{cases} u = 0; z = 0 \\ u = 1; z = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{2u}{u^4+1}\, du = \int_0^1 \frac{dz}{z^2+1} = \arctan(z)\Big|_0^1 = \arctan(1) - \cancelto{0}{\arctan(0)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_0^1 \left|\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1}\right| dx = \frac{\pi}{4}}$$

Ahora resolvemos (II)

$$\int_0^1 \left|\cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right| dx = \int_0^1 \left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}+3\pi\right)\right| dx$$

$$= \int_0^1 \left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\overset{-1}{\cancel{\cos(3\pi)}} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(3\pi)}}\right| dx = \int_0^1 \left|-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| dx$$

$$= \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx;\ \text{sea}\ \begin{matrix} t = \frac{\pi x}{2} \\ dt = \frac{\pi}{2}dx \end{matrix}\ ;\left\{ \begin{matrix} x = 1; t = \frac{\pi}{2} \\ x = 0; t = 0 \end{matrix}\right.$$

$$\to \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \frac{2}{\pi}(\operatorname{sen} t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}(\overset{1}{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}} - \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen} 0}}) = \frac{2}{\pi}$$

$$\to \boxed{\int_0^1 \left|\cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right| dx = \frac{2}{\pi}}$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1} - \cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right) dx\right|$$

$$\leq$$

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1} - \cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right)\right| dx$$

$$\leq$$

$$\int_0^1 \left|\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{x^2+1}\right| dx - \int_0^1 \left|\cos\left(\frac{\pi(x+6)}{2}\right)\right| dx < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}}$$

Pregunta 4.

Primero se procede a evaluar el límite para de esta manera verificar si el mismo posee indeterminación, y si lo posee identificar qué tipo de indeterminación es. Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arc\,sen} t\, dt}{\displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{t^3+1}\, dt} = \frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} 0} \operatorname{arc\,sen} t\, dt}{\displaystyle\int_0^{2(0)} \sqrt{t^3+1}\, dt} = \frac{\displaystyle\int_0^{0} \operatorname{arc\,sen} t\, dt}{\displaystyle\int_0^{0} \sqrt{t^3+1}\, dt}$$

Se conoce que $\displaystyle\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$, entonces

$$\frac{\displaystyle\int_0^{0} \operatorname{arc\,sen} t\, dt}{\displaystyle\int_0^{0} \sqrt{t^3+1}\, dt} = \frac{0}{0}$$

Como el límite presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se procede a aplicar la regla de L'Hopital para límites. De esta manera

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arc\,sen} t\, dt}{\displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{t^3+1}\, dt} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arc\,sen} t\, dt\right]'}{\left[\displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{t^3+1}\, dt\right]'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x))}(\operatorname{sen} x)' + (\operatorname{arc\,sen} x)(x)'}{(\sqrt{(2x)^3+1})(2x)' + \cancelto{0}{(\sqrt{(0)^3+1})(0)'}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + \operatorname{arc\,sen} x}{2\sqrt{8x^3+1}}$$

$$= \frac{\cancelto{0}{(0)(\cos 0)} + \cancelto{0}{\operatorname{arc\,sen} 0}}{2\sqrt{\cancelto{0}{(8)(0)^3} + 1}} = \frac{0+0}{2\sqrt{1}} + \frac{0}{2} = 0$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arc\,sen} t \, dt}{\displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{t^3+1}\, dt} = 0}$$